ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 63, № 1
апрель, 1985

ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХЧАСТИЧНЫХ РЕЗОНАНСОВ

Куперин Ю. А., Макаров К. А., Павлов Б. С.

С помощью теории расширений построена нетривиальная матрица рассеяния для системы трех одномерных частиц в модели граничных условий. Исследована аналитическая структура построенной S-матрицы на энергетической поверхности.

Одной из важных задач теории рассеяния в системе нескольких частиц является изучение резонансных особенностей S-матрицы и выявление связи этих особенностей с внутренней структурой сталкивающихся частиц. Аналитическую структуру S-матрицы довольно трудно проследить в системе трех и большего числа частиц с реалистическим взаимодействием. Поэтому возникает интерес к более простым, но зато допускающим точные решения моделям.

В нерелятивистской задаче трехчастичного рассеяния успешно используется метод потенциалов нулевого радиуса [1—3]. Этот метод, однако, не приспособлен для описания процессов рассеяния, сопровождающихся изменением внутренней структуры частиц, поскольку с самого начала «внутреннее пространство» каждой из частиц считается тривиальным.

В настоящей работе мы строим модель теории рассеяния для трех одномерных частиц, в которой частицы уже обладают внутренней структурой. В предлагаемой модели связь «внутреннего» и «внешнего» пространств реализуется с помощью граничных условий, что позволяет выписать явно трехчастичную матрицу рассеяния. Мы демонстрируем наш подход на простейшей задаче об описании процесса рассеяния $3\to3$ с «включением» внутренней структуры лишь в тройных столкновениях. При этом удается детально проследить как за расположением трехчастичных резонансов и энергий трехтельных связанных состояний, так и за их движением при изменении «константы связи», регулирующей обмен энергий между внутренним и внешним пространствами.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Оператор энергии H системы трех одномерных квантовых частиц, ограниченный на инвариантное подпространство нулевого полного импульса, действует на пространстве $L^2(\Lambda)$ функций, квадратично интегрируемых по $\Lambda=\{x\in\mathbb{R}^3,\ x_1+x_2+x_3=0\}$, по формуле

$$(H\Psi)(x)=-\Delta\Psi+V(x)\Psi,$$

где Δ — оператор Лапласа на Λ, а $V(x)$ — потенциал, представимый в виде

$$V=\sum_{i,j=1,\ i>j}^{3} v(x_i-x_j).$$

Если парные потенциалы $v(x)$, $x\in\mathbb{R}^1$, достаточно быстро убывают при $|x|\to\infty$, то существенная область взаимодействия — некоторая окрестность прямых $l_j=\{x\in\Lambda:\ x_k=x_l,\ (j,\ k,\ l)$ — перестановка чисел $(1,\ 2,\ 3)\}$. Прямые l_i, $i=1,\ 2,\ 3$, разбивают Λ на шесть секторов. Внутренность каждого сектора λ состоит из векторов x таких, что $x_{i_1}>x_{i_2}>x_{i_3}$, где $\sigma=(i_1,\ i_2,\ i_3)$ — перестановка чисел $(1,\ 2,\ 3)$. Перестановку σ будем считать номером сектора и писать $\lambda=\lambda_\sigma$.

Задача рассеяния в модели трех одномерных частиц, парные взаимодействия между которыми задаются с помощью граничных условий $\partial\Psi/\partial n_i+h_i\Psi=0$ на прямых l_i (n_i — нормаль к l_i), сводится, по существу, к задаче дифракции плоских волн на системе «экранов» l_i [3, 4]. Для идеальных условий $h_i=0$ или $h_i=\infty$ оказывается, что амплитуда рассеяния $f(\hat{p},\ \hat{p}',\ \sqrt{E})$ зависит лишь от угловых переменных $\hat{p}$, $\hat{p}'$ и не зависит от энергии E (E — полная энергия сталкивающихся частиц в системе центра масс) и, следовательно, не имеет особенностей на энергетической поверхности. Выписанные выше граничные условия отвечают предположению, что частицы в процессе рассеяния не могут проходить друг сквозь друга: поток через экран l_i равен нулю: $j_i=\{\Psi^*\partial\Psi/\partial n_i-\Psi\partial\Psi^*/\partial n_i\}=0$. Асимптотические условия на волновую функцию в окрестности точки $x=0$: $\Psi\sim|x|^{\pi/\gamma_0}$, $|\nabla\Psi|\sim|x|^{\pi/\gamma_0-1}$ при $|x|\to0$, где $2\pi-\gamma_0$ — угол между соседними экранами, запрещают проход энергии через точку $x=0$ в другие секторы, отличные от сектора, в котором сосредоточено начальное возмущение. Таким образом, решение задачи рассеяния в модели граничных условий сводилось к решению задачи дифракции лишь внутри одного из шести возможных секторов. В ситуации, где рассматривалась задача дифракции на всей системе экранов [4], не удалось получить явного выражения для амплитуды $f(\hat{p},\ \hat{p}',\ \sqrt{E})$, что позволило бы изучить ее поведение на «нефизическом» листе.

Мы строим модель, отличную от предложенных в цитированных работах, включив дополнительно трехчастичный потенциал нулевого радиуса. Двухчастичные потенциалы нулевого радиуса будем считать отвечающими идеальному условию

$$(1)\qquad \partial\Psi/\partial n_i|_{l_i}=0,\qquad i=1,2,3.$$

С физической точки зрения включение трехчастичного потенциала нулевого радиуса отвечает возможности обмена энергией между различными секторами через точку тройного столкновения $x=0$. В этой модели удается явно вычислить амплитуду рассеяния $f(\hat{p},\ \hat{p}',\ \sqrt{E})$ и исследовать ее особенности на римановой поверхности энергии. Заметим сразу, что в нашем случае амплитуда рассеяния уже является нетривиальной, т. е. реально зависит от переменных $\hat{p}$, $\hat{p}'$; она кусочно-постоянна.

2. МОДЕЛЬ ТРЕХЧАСТИЧНЫХ СИЛ НУЛЕВОГО РАДИУСА

Фиксируем сектор λ_σ и рассмотрим в $L^2(\lambda_\sigma)$ оператор $L_0=-\Delta$ с областью определения $\mathscr{D}(L_0)=\{u\in C_0^\infty(\lambda_\sigma),\ \partial u/\partial n_i|_{l_i}=0\}$. Класс $C_0^\infty(\lambda_\sigma)$ состоит из функций, обращающихся в нуль в некоторой окрестности вершины $x=0$ сектора λ_σ. Замыкание $\bar{L}_0$ — симметричный оператор, имеющий индексы дефекта (1,1). Его дефектные элементы g_{k_0} в комплексной точке $\lambda_0=k_0^2$ выражаются через функцию Грина уравнения Гельмгольца

$$(\Delta+k^2)G(x,x',k_0)=-4\pi\delta(x-x'),$$

$$g_{k_0}=G(x,0,k_0)=i\pi H_0^{(1)}(k_0|x|),$$

так что сопряженный оператор определен на линеале $\mathscr{D}(L_0^*)=\mathscr{D}(\bar{L}_0)+$ $+\mathscr{L}(g_{k_0},\ g_{-\bar{k}_0})$. Введем в дефектном подпространстве новый базис $G_+=$ $=(1/2)(g_{k_0}+g_{-\bar{k}_0})$, $G_-=(1/2i)(g_{k_0}-g_{-\bar{k}_0})$. Выбрав для удобства $k_0=e^{i\pi/4}$ и воспользовавшись асимптотикой функции Ханкеля

$$i\pi H_0^{(1)}(k|x|)\sim i\pi-2\ln(k|x|/2)-2\gamma,\qquad |x|\to 0$$

(γ — постоянная Эйлера), получим для $G_\pm$ следующие представления:

$$G_+=-2\ln\frac{|x|}{2}-2\gamma+O(|x|^2\ln|x|),\qquad G_-=-\frac{3\pi}{2}+O(|x|^2\ln|x|).$$

Функции из области определения сопряженного оператора, $u\in\mathscr{D}(L_0^*)$, однозначно представимы в виде $u=\varepsilon_+G_++\varepsilon_-G_-+\tilde{u}$, $\tilde{u}\in\mathscr{D}(\bar{L}_0)$, а их асимптотика в нуле может быть легко подсчитана,

$$u\sim-\varepsilon_+\ln(|x|/2)^2-\frac{3\pi}{2}\varepsilon_--2\gamma\varepsilon_+.$$

Обратно по известной асимптотике в нуле могут быть восстановлены величины $\varepsilon_\pm$. В частности, для расходящейся волны $\tilde{G}$,

$$\tilde{G}=\frac{1}{2}H_0^{(1)}(k|x|)\underset{|x|\to\infty}{\sim}(2\pi k|x|)^{-1/2}e^{ik|x|-i\pi/4},$$

в базисе $G_\pm$ имеем

$$\varepsilon_+=1/2\pi i\qquad \varepsilon_-=\frac{i}{3\pi^2}\ln(-1/E),\qquad E=k^2. \tag{2}$$

Пусть $u,\ v\in\mathscr{D}(L_0^*)$, тогда

$$\langle L_0^*u,v\rangle-\langle u,L_0^*v\rangle=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{|x|=\delta,\ x\in\lambda_\sigma}\left(u\frac{\partial\bar{v}}{\partial n}-\bar{v}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\{\varepsilon_-(u)\bar{\varepsilon}_+(v)-\varepsilon_+(u)\bar{\varepsilon}_-(v)\}\equiv[u,v]_\sigma$$

Форму $[\cdot,\ \cdot]_\sigma$ назовем граничной формой в секторе λ_σ.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\sum_\sigma\oplus L^2(\lambda_\sigma)$ оператор $L=\sum_\sigma\oplus L_\sigma$, где L_σ — соответствующий оператор в каждом из секторов λ_σ.

Тогда для $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\sum_{\sigma}\oplus L^2(\lambda_\sigma)$, очевидно, имеем

$$\langle L^*\mathcal{U},\mathcal{V}\rangle-\langle\mathcal{U},L^*\mathcal{V}\rangle=\sum_{\sigma}[u_\sigma,v_\sigma]_\sigma=\frac{1}{\pi^2}\{\langle\varepsilon_-^{\mathrm{ext}}(\mathcal{U}),\varepsilon_+^{\mathrm{ext}}(\mathcal{V})\rangle-$$

$$-\langle\varepsilon_+^{\mathrm{ext}}(\mathcal{U}),\varepsilon_-^{\mathrm{ext}}(\mathcal{V})\rangle\}\equiv\{\mathcal{U},\mathcal{V}\}.$$

Шестикомпонентные векторы $\varepsilon_\pm^{\mathrm{ext}}$ будем называть граничными.

Оператор L является плотнозаданным оператором с индексами дефекта (6,6). Область определения сопряженного к нему оператора в соответствии с формулами Неймана представима в виде $\mathcal{D}(L^*)=\mathcal{D}(\bar{L})+\mathfrak{M}+\mathfrak{M}^*$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$ — дефектные подпространства оператора L в точках i и $-i$, соответственно. Компоненты граничных векторов $\varepsilon_\pm^{\mathrm{ext}}$ элемента $\mathcal{U}\in\mathcal{D}(L^*)$ определяются однозначно представлением $\mathcal{U}$ в виде $\mathcal{U}=\mathcal{U}_0+\sum_{\sigma}\varepsilon_+{}^\sigma G_+{}^\sigma+$ $+\varepsilon_-{}^\sigma G_-{}^\sigma$, $\mathcal{U}_0\in\mathcal{D}(\bar{L})$. Все самосопряженные расширения оператора L получаются из сопряженного оператора L^* сужением его области определения до линеала $\mathcal{D}$: $\mathcal{D}(\bar{L})\subset\mathcal{D}\subset\mathcal{D}(L^*)$, на котором аннулируется граничная форма $\{\cdot,\ \cdot\}$. Для этого, например, достаточно, чтобы граничные векторы элементов из $\mathcal{D}$ удовлетворяли соотношению

$$A\varepsilon_-^{\mathrm{ext}}=\varepsilon_+^{\mathrm{ext}}, \tag{3}$$

где A — эрмитова матрица 6×6. Полное описание всех самосопряженных расширений см., например, в [5].

В полном 36-параметрическом семействе расширений следует выбрать физически осмысленные. Например, требование равноправия сталкивающихся частиц приводит к циклической матрице A. Полученное самосопряженное расширение оператора L будем обозначать L_A.

3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА L_A

Проведем спектральный анализ полученного оператора — опишем решение задачи рассеяния и укажем вид трехчастичных связанных состояний.

Плоская волна $\exp i\langle p, x\rangle$, падающая на экран l_i в соответствии с законом отражения, определяемым граничным условием (1), трансформируется в отраженную волну $\exp i\langle\tau_i p, x\rangle$, где τ_i — элемент группы перестановок S^3 [4]. Геометрически действие элемента группы τ_i на вектор p соответствует отражению p относительно прямой l_i. Таким образом, плоская волна $\exp i\langle p, x\rangle$, приходящая из сектора λ_μ (в этом случае будем писать $p\in\lambda_\mu{}^*=-\lambda_\mu$), испытав три отражения, уходит в направлении $\tau_\mu p$. При этом вклад плоских волн Ψ^d в секторе λ_μ совпадает с симметризацией падающей волны по перестановкам координат вектора p: $\Psi^d=\sum_{\sigma\in S^3}\exp i\langle\sigma p, x\rangle$.

Кроме того, в каждом из секторов λ_ν возникает расходящаяся волна $\tilde{G}(|p||x|)$ с амплитудой $\eta_{\nu\mu}$. В нашей модели «парциальные» амплитуды $\eta_{\nu\mu}$, отвечающие рассеянию из сектора λ_μ в сектор λ_ν, уже не зависят от угловых переменных, и в этом смысле в каждом из секторов рассеяние происходит в S-канале. Однако полная амплитуда $f(\hat{p}, \hat{p}', \sqrt{E}) = \sum_{\nu,\mu} \chi_\nu(\hat{p})\chi_\mu(\hat{p}')\eta_{\nu\mu}(\sqrt{E})$ «в целом» зависит от угловых переменных $\hat{p}$, $\hat{p}'$; она кусочно-постоянна на Λ. Здесь $\chi_\nu(\hat{p})$ — индикатор сектора λ_ν. Следовательно, собственные функции непрерывного спектра гамильтониана L_A, имеющие в асимптотике плоские волны только в секторе λ_μ, в секторе λ_ν представимы в виде

$$(4) \qquad \Psi_{\nu\mu}(x, p) = \delta_{\nu\mu}\Psi^d + \eta_{\nu\mu}(|p|)\tilde{G}(|p||x|).$$

Для вычисления амплитуд $\eta_{\nu\mu}$ найдем граничные векторы собственной функции $\Psi_{\nu\mu}$. Асимптотика $\Psi_{\nu\mu}$ в секторе λ_ν в окрестности точки $x=0$ дается формулой (см. (2))

$$\Psi_{\nu\mu}(x, p) \sim 6\delta_{\nu\mu} + \eta_{\nu\mu}\left(\frac{1}{2\pi i}G_+^\nu + \frac{1}{2\pi^2}\ln(-1/E)G_-^\nu\right) \sim$$
$$\sim \varepsilon_+^{\nu\mu}G_+^\nu + \varepsilon_-^{\nu\mu}G_-^\nu.$$

Введем векторы $\boldsymbol{\eta}_\mu$ и $\mathbf{e}_\mu$ с компонентами $\eta_{\nu\mu}$ и $-8i\delta_{\nu\mu}$, соответственно. Тогда имеют место равенства

$$(5) \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_+^{\text{ext}}(\Psi_\mu) = \frac{\boldsymbol{\eta}_\mu}{2\pi i}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_-^{\text{ext}}(\Psi_\mu) = \frac{1}{2\pi i}(\mathbf{e}_\mu + \Phi(E)\boldsymbol{\eta}_\mu),$$

где $\Phi(E) = -\frac{2}{3\pi}\ln(-1/E)$, $E=p^2$. Условие связи граничных векторов (3) приводит к следующему представлению для амплитуды $\boldsymbol{\eta}_\mu$: $\boldsymbol{\eta}_\mu = (\mathrm{I} - \Phi(E)A)^{-1}A\mathbf{e}_\mu$, здесь I — единичный оператор в $\mathbb{R}^6$. Функция $\Phi(E)$ является многозначной на плоскости энергии E. Для выделения однозначной ветви $\Phi(E)$ проведем разрез по положительной полуоси и фиксируем ветвь логарифма таким образом, чтобы на отрицательной полуоси функция $\Phi(E)$ принимала вещественные значения. Зная собственные значения λ_s и собственные векторы $\mathbf{a}_s$ матрицы A: $A\mathbf{a}_s = \lambda_s\mathbf{a}_s$, получим явное выражение для вектора парциальных амплитуд

$$\boldsymbol{\eta}_\mu(\sqrt{E}) = \sum_{s=1}^{6} \lambda_s \mathbf{a}_s \langle \mathbf{e}_\mu, \mathbf{a}_s\rangle (1 - \Phi(E)\lambda_s)^{-1}.$$

Особенности амплитуд $\boldsymbol{\eta}_\mu$ лежат на первом листе энергии на отрицательной полуоси и совпадают с энергиями трехчастичных связанных состояний

$$(6) \qquad E_s = -\exp\left(\frac{3\pi}{2}\lambda_s^{-1}\right), \qquad s=1, 2, \ldots, 6.$$

Соответствующие собственные функции дискретного спектра имеют вид

$$(7) \qquad \Psi_s(x) = H_0^{(1)}\left(ie^{\frac{3\pi}{4}\lambda_s^{-1}}|x|\right)\frac{1}{2}\sum_t \chi_t(x)a_{st},$$

где $\chi_t(x)$ — индикатор сектора λ_t, a_{st}—t-компонента собственного вектора a_s.

Зная функции непрерывного спектра $\Psi(x, p)$, можно найти матрицу рассеяния S_E как оператор в $L^2(S^1)$. Ядро $S_E(\hat{q}, \hat{p})$ этого оператора определяется следующей асимптотикой при $x\to\infty$ [4]:

$$\int \Psi(x,p)g(\hat{x})d\hat{x} = \int S_E(\hat{x},\hat{p})g(\hat{x})d\hat{x}\,\tilde{G}(|p|\,|x|)+O(|x|^{-3/2}),$$

в которой g — гладкая на S^1 функция с носителем, не содержащим вектора — $\hat{p}$, $d\hat{x}$ — нормированная мера на S^1 и $E=p^2$. Оператор рассеяния имеет естественную блочную структуру $S_E\sim S_E^{\nu\mu}$, связанную с разбиением плоскости Λ на секторы, где через μ обозначен номер сектора приходящей волны, ν — номер сектора рассеяния, $\hat{x}\in\lambda_\nu$, $\hat{p}\in\lambda_\mu^*$. Матрица рассеяния $S_E^{\nu\mu}$ выражается через амплитуду $\eta_{\nu\mu}$ следующим образом: $S_E^{\nu\mu}(\hat{q},\hat{p})=\delta(\hat{q},\tau_\mu\hat{p})+\eta_{\nu\mu}(\sqrt{E})$, $\hat{q}\in\lambda_\nu$, $\hat{p}\in\lambda_\mu^*$, где $\delta(\hat{q},\hat{p})$ — дельта-функция на S^1.

Наконец, отметим, что операторы Лапласа, действующие в секторах, оказались в результате наших построений связанными «в S-канале» в единый оператор, который мы, не опасаясь недоразумений, обозначили через L_A. На ортогональном дополнении к S-каналу операторы Лапласа расцеплены, т. к. для нас представляет интерес только S-волновое рассеяние в каждом фиксированном секторе.

Суммируем приведенные выше рассуждения в следующем утверждении.

Теорема 1. *Оператор L_A имеет конечное число отрицательных собственных значений E_s, определяемых равенством* (6). *Соответствующие собственные функции дискретного спектра даются формулой* (7). *Непрерывный спектр оператора L_A является 6-кратным и заполняет промежуток* $[0,\infty)$. *Полная система собственных функций непрерывного спектра определяется соотношением* (4).

4. ТРЕХЧАСТИЧНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ

Полученная в разделе 3 S-матрица имеет полюса в точках дискретного спектра оператора L_A и не имеет особенностей на «нефизическом» листе. Более богатая особенностями S-матрица отвечает модели, в которой предполагается, что в результате тройного столкновения образуется новый комплекс частиц, описываемый гамильтонианом A^{in}, и этот комплекс со временем распадается в силу «внешних» причин. Для построения модели нам понадобится некоторый вариант теории расширений неплотно заданных симметричных операторов. Впервые такая теория была применена в [5] для описания модели точечного атома. Мы разовьем эту теорию в применении к трехчастичному рассеянию. При этом мы покажем, как, исходя из заданного самосопряженного оператора A^{in}, действующего во «внутреннем» гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, построить оператор, отличающийся от исходного на конечномерный, и параметризуем все такие расширения.

Пусть $\mathfrak{R}$ — конечномерное порождающее подпространство оператора A^{in}, $U=(A^{\text{in}}+i)^{-1}(A^{\text{in}}-i)$ — его преобразование Кэли, $\mathfrak{R}^*=U^*\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^\perp=\mathcal{H}\ominus\mathfrak{R}$. Построим неплотно заданный симметричный оператор, являющийся сужением A^{in}, с дефектными подпространствами $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^*$. Для этого зададим на линеале $\mathcal{D}(A_\mathfrak{R})=(I-U)\mathfrak{R}^{*\perp}$ оператор $A_\mathfrak{R}$ формулой $A_\mathfrak{R}h=A^{\text{in}}h$, $h\in\mathcal{D}(A_\mathfrak{R})$.

Теорема 2. *Оператор $A_\mathfrak{R}$ является симметричным оператором с де-*

фектными подпространствами

$$\mathfrak{N}=\mathscr{H}\ominus(A_{\mathfrak{N}}-i\mathrm{I})\mathscr{D}(A_{\mathfrak{N}}),\qquad \mathfrak{N}^*=\mathscr{H}\ominus(A_{\mathfrak{N}}+i\mathrm{I})\mathscr{D}(A_{\mathfrak{N}}).$$

Расширение симметричного оператора L в предыдущем разделе 2 сводилось к сужению сопряженного к нему на более узкую область, на которой уже имеет место самосопряженность. В данном случае мы не можем действовать указанным способом, т. к. для неплотно заданного оператора сопряженного не существует. Тем не менее хотелось бы по аналогии с «плотной» теорией считать, что дефектные подпространства являются собственными подпространствами формально сопряженного оператора

$$(8)\qquad A_{\mathfrak{N}}^*|\mathfrak{N}^*=i\mathrm{I},\qquad A_{\mathfrak{N}}^*|\mathfrak{N}=-i\mathrm{I}$$

и выполнено $A_{\mathfrak{N}}^*|\mathscr{D}(A_{\mathfrak{N}})=A_{\mathfrak{N}}|\mathscr{D}(A_{\mathfrak{N}})$. Построить единый оператор, удовлетворяющий указанным условиям, вообще говоря, невозможно, поскольку, хотя сумма $\mathfrak{N}+\mathfrak{N}^*$ все же является прямой, подпространства $\mathfrak{N}+\mathfrak{N}^*$ и $\mathscr{D}(A_{\mathfrak{N}})$ уже могут пересекаться. Однако, выделяя в $\mathfrak{N}+\mathfrak{N}^*$ специальным образом подпространство $\mathscr{L}$ и задавая на $\mathscr{L}+\mathscr{D}(A_{\mathfrak{N}})$ оператор $A_{\mathscr{L}}$ исходя из условий (8), мы построим все расширения неплотно заданного оператора $A_{\mathfrak{N}}$.

Ясно, что всякое расширение оператора $A_{\mathfrak{N}}$ задается однозначно оператором $\mathscr{B}$, отображающим $\mathfrak{N}^*$ на $\mathfrak{N}$ таким образом, что оператор $U_{\mathscr{B}}=UP_{\mathfrak{N}^{*\perp}}+\mathscr{B}P_{\mathfrak{N}^*}$ не имеет собственного числа $\lambda=1$. Здесь $P_{\mathfrak{N}^*}(P_{\mathfrak{N}^{*\perp}})$ — проектор на $\mathfrak{N}^*(\mathfrak{N}^{*\perp})$. Действительно, в этом случае определен, быть может неограниченный, оператор $A_{\mathscr{B}}$, связанный с $U_{\mathscr{B}}$ преобразованием Кели

$$U_{\mathscr{B}}=(A_{\mathscr{B}}+i\mathrm{I})^{-1}(A_{\mathscr{B}}-i\mathrm{I}),\qquad A_{\mathscr{B}}=i(\mathrm{I}-U_{\mathscr{B}})^{-1}(\mathrm{I}+U_{\mathscr{B}}).$$

В приложениях важно описать область определения расширенного оператора $A_{\mathscr{B}}$. Хотя в рассматриваемом случае нельзя прямо пользоваться формулами Неймана, даваемое ими описание области определения остается справедливым. Именно пусть $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}=(\mathrm{I}-\mathscr{B})\mathfrak{N}^*$ — подпространство в $\mathfrak{N}+\mathfrak{N}^*$, однозначно определяемое оператором $\mathscr{B}$. Тогда справедлива следующая

Теорема 3. *Область определения оператора $A_{\mathscr{B}}$ представима в виде $\mathscr{D}(A_{\mathscr{B}})=(\mathrm{I}-U)\mathfrak{N}^{*\perp}+(\mathrm{I}-\mathscr{B})\mathfrak{N}^*=\mathscr{D}(A_{\mathfrak{N}})+\mathscr{L}_{\mathscr{B}}$. Оператор $A_{\mathscr{B}}$ самосопряжен в том и только в том случае, когда $\mathscr{B}:\mathfrak{N}^*\to\mathfrak{N}$ — изометрия $\mathfrak{N}^*$ на $\mathfrak{N}$.*

Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$, тогда $\{U^*\varphi_i\}_{i=1}^n$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{N}^*$. Введем в $\mathfrak{N}+\mathfrak{N}^*$ новый базис $g_+{}^k={}^1/_2(U^*\varphi_k+\varphi_k)$, $g_-{}^k=(1/2i)(U^*\varphi_k-\varphi_k)$. Всякий элемент $\mathrm{l}\in\mathscr{L}_{\mathscr{B}}$ однозначно представим в виде

$$(9)\qquad \mathrm{l}=\sum_k(1/2i)\alpha_k(\mathrm{I}-\mathscr{B})U^*\varphi_k=\sum_k\varepsilon_+{}^kg_+{}^k+\varepsilon_-{}^kg_-{}^k.$$

Пусть B — матрица оператора $\mathscr{B}:\mathscr{B}U^*\varphi_i=\sum_k B_{ik}\varphi_k$, а $\varepsilon_\pm,\alpha$ — векторы с компонентами $\varepsilon_\pm{}^k$, α_k. Векторы $\varepsilon_\pm$ будем называть граничными векторами элемента l. Из (9) получим уравнения для граничных векторов

$$(10)\qquad i\varepsilon_++\varepsilon_-=\alpha,\qquad i\varepsilon_+-\varepsilon_-=B^T\alpha.$$

Граничными векторами элементов из области определения оператора

$A_{\mathscr{B}}$ будем называть граничные векторы их $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}$-компоненты. Из условий (10) следует, что граничные векторы элемента $\mathbf{u}\in\mathscr{D}(A_{\mathscr{B}})$ удовлетворяют соотношениям связи

$$(11)\qquad \varepsilon_-=i(\mathrm{I}-B^T)(\mathrm{I}+B^T)^{-1}\varepsilon_+.$$

Рассмотрим в прямой сумме «внутреннего» и «внешнего» гильбертовых пространств $\mathscr{H}\oplus L^2(\Lambda)$ симметричный оператор $\mathscr{A}_0=A^{\mathfrak{N}}\oplus\bar{L}$. Он имеет дефектные подпространства $\mathfrak{N}\oplus\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}^*\oplus\mathfrak{M}^*$ в точках i и $-i$, соответственно. Граничные векторы элементов линеала $\mathfrak{N}+\mathfrak{N}^*$ $(\mathfrak{M}+\mathfrak{M}^*)$ будем обозначать $\varepsilon_\pm^{\mathrm{in}}$ $(\varepsilon_\pm^{\mathrm{ext}})$. Граничным вектором элемента $\mathbf{u}\in(\mathfrak{N}+\mathfrak{N}^*)\oplus(\mathfrak{M}+\mathfrak{M}^*)=\mathfrak{D}$ назовем двухкомпонентный вектор $(\varepsilon_\pm^{\mathrm{in}}, \varepsilon_\pm^{\mathrm{ext}})$. Рассмотрим в $\mathfrak{D}$ линеал $\mathscr{L}\subset\mathfrak{D}$, граничные векторы элементов которого удовлетворяют соотношению

$$(12)\qquad \begin{pmatrix}\varepsilon_+^{\mathrm{in}}\\ \varepsilon_+^{\mathrm{ext}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{A} & Q^*\\ Q & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_-^{\mathrm{in}}\\ \varepsilon_-^{\mathrm{ext}}\end{pmatrix},$$

где A, $\tilde{A}$ — самосопряженные матрицы. Из теоремы 3 вытекает

Теорема 4. *Оператор* $\mathscr{A}$,

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}_0+(i\mathrm{I}|\mathfrak{N}-i\mathrm{I}|\mathfrak{N}^*+i\mathrm{I}|\mathfrak{M}-i\mathrm{I}|\mathfrak{M}^*)|\mathscr{L},$$

с областью определения

$$\mathscr{D}(\mathscr{A})=\mathscr{D}(A_{\mathfrak{N}})\oplus\mathscr{D}(\bar{L})+\mathscr{L}$$

самосопряжен.

Полученный самосопряженный оператор будем считать гамильтонианом трехчастичного взаимодействия с внутренней структурой. Опишем наиболее интересные спектральные характеристики оператора $\mathscr{A}$.

Рассеянные волны, отвечающие положительным значениям спектрального параметра $k>0$, определяются как решения однородного уравнения

$$(13)\qquad \mathscr{A}\mathscr{U}=k^2\mathscr{U},\qquad \mathscr{U}=\{\mathbf{u}^{\mathrm{in}}, \mathbf{u}^{\mathrm{ext}}\},$$

внешняя часть которых в секторе λ_ν имеет вид

$$(14)\qquad u_{\nu\mu}^{\mathrm{ext}}(x,p)=\delta_{\nu\mu}\Psi^d+\eta_{\nu\mu}^{\mathrm{ext}}(|p|)\tilde{G}(|p|\,|x|),\qquad p=k\cdot\hat{p},$$

а внутренняя часть $\mathbf{u}^{\mathrm{in}}=\mathbf{u}_0^{\mathrm{in}}+\sum\limits_n \varepsilon_+^n\mathbf{g}_+^n+\varepsilon_-^n\mathbf{g}_-^n$ удовлетворяет уравнению

$$(15)\qquad A^{\mathrm{in}}\mathbf{u}_0^{\mathrm{in}}+\sum_n(\varepsilon_-^n\mathbf{g}_+^n-\varepsilon_+^n\mathbf{g}_-^n)=k^2\Big(\mathbf{u}_0^{\mathrm{in}}+\sum_n(\varepsilon_+^n\mathbf{g}_+^n+\varepsilon_-^n\mathbf{g}_-^n)\Big)$$

с дополнительным условием связи (12). Из (15) имеем

$$(16)\qquad \mathbf{u}_0^{\mathrm{in}}=\sum_n\{(k^2\varepsilon_+^n-\varepsilon_-^n)(A^{\mathrm{in}}-k^2)^{-1}\mathbf{g}_+^n+(k^2\varepsilon_-^n+\varepsilon_+^n)(A^{\mathrm{in}}-k^2)^{-1}\mathbf{g}_-^n\}.$$

Уравнение ортогональности $(A^{\mathrm{in}}-i)\mathbf{u}_0^{\mathrm{in}}\perp\mathfrak{N}$, $\mathbf{u}_0^{\mathrm{in}}\in\mathscr{D}(A_{\mathfrak{N}})$ налагает дополнительную связь на граничные векторы внутренней задачи:

$$(17)\qquad \varepsilon_-^{\mathrm{in}}=\Delta(k)\varepsilon_+^{\mathrm{in}},$$

где $\Delta(k)$ — матрица оператора $P_{\mathfrak{N}}(\mathrm{I}+k^2A^{\mathrm{in}})(A^{\mathrm{in}}-k^2\mathrm{I})^{-1}P_{\mathfrak{N}}$ в базисе $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$.

Вычислим теперь вектор амплитуд в соотношении (14). Для этого используем связь (5) между $\varepsilon_{\pm}^{\text{ext}}$ и, решая совместно уравнения (12) и (17), найдем, что

$$\eta_{\mu}^{\text{ext}}=\left[I-\frac{Q\Delta Q^*}{I-\tilde{A}\Delta}\Phi(k^2)-A\Phi(k^2)\right]^{-1}\left[A+\frac{Q\Delta Q^*}{I-\tilde{A}\Delta}\right]\mathbf{e}_{\mu}. \tag{18}$$

Векторы $\varepsilon_{\pm}^{\text{in}}$ могут быть теперь найдены в терминах известных векторов $\varepsilon_{\pm}^{\text{ext}}$, связанных с амплитудами η_{μ}^{ext} соотношением (5),

$$\varepsilon_{-}^{\text{in}}=\Delta(I-\tilde{A}\Delta)^{-1}Q^*\varepsilon_{-}^{\text{ext}},\quad \varepsilon_{+}^{\text{in}}=(I-\tilde{A}\Delta)^{-1}Q^*\varepsilon_{+}^{\text{ext}}.$$

Находя из (16) $\mathbf{u}_0^{\text{in}}$, получаем полное решение задачи рассеяния в терминах порождающих элементов.

Следует отметить, что в рамках нашей модели ничто не мешает считать внутренний гамильтониан A^{in} бесконечномерным оператором. Например, для описания неупругих процессов можно использовать оператор A^{in} с непрерывным спектром. Отвечающая такому оператору матрица рассеяния окажется уже неунитарной (сжимающей). Все же сначала интересно рассмотреть случай, когда A^{in} конечномерен: это хорошее приближение для описания взаимодействия частиц при низких энергиях. В этом случае оператор-функция $\Delta(k)$, содержащая основную информацию о структуре внутреннего гамильтониана, имея положительную мнимую часть в верхней полуплоскости, является рациональной. Проследим в этом случае связь внутреннего гамильтониана с особенностями S-матрицы рассматриваемой задачи. Оказывается, что при включении слабой связи между внутренним и внешним пространствами положительные собственные значения оператора A^{in} превращаются в резонансы, а отрицательные собственные значения порождают трехчастичные связанные состояния.

Действительно, рассмотрим оператор $\mathcal{A}_{\alpha}$, отвечающий матрице связи (12) со следующей структурой: $\tilde{A}=0$, $Q=Q^*=\alpha I$, где α — малый вещественный параметр. Порождающие элементы будем считать A^{in}-ортогональными, $\langle A^{\text{in}}\varphi_i, \varphi_j\rangle=0$, $i\neq j$. В этом случае матрица $\Delta(k)$ диагонализуется, $\Delta(k)=\operatorname{diag}\{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6\}$, где

$$\Delta_s(k)=\left\langle \frac{A^{\text{in}}k^2+I}{A^{\text{in}}-k^2I}\varphi_s, \varphi_s\right\rangle=\sum_t\frac{\lambda_{st}k^2+1}{\lambda_{st}-k^2}\langle P_{st}\varphi_s, \varphi_s\rangle.$$

Здесь λ_{st} — s-е собственное значение оператора A^{in} в t-м приводящем подпространстве, порожденном элементом φ_s, P_{st} — соответствующий собственный проектор. Согласно общим теоремам о возмущении спектра непрерывный спектр оператора $\mathcal{A}_{\alpha}$ состоит из абсолютно непрерывной ветви, заполняющей промежуток $[0, \infty)$. При этом внешняя часть $\mathbf{u}^{\text{ext}}$ соответствующих собственных функций определяется равенствами (14), (18), а их внутренняя часть $\mathbf{u}^{\text{in}}$ выражается с помощью (16) через компоненты векторов $\varepsilon_{\pm}^{\text{in}}$, которые однозначно определяются из уравнений (5), (12).

Т е о р е м а 5. *Дискретный спектр оператора $\mathcal{A}_{\alpha}$ состоит из конечного числа точек $k=i\varkappa$, которые лежат на положительной мнимой оси и служат корнями уравнения*

$$\prod_{s=1}^{6}(\alpha^2\Delta_s(k)\Phi(k^2)-1)=0. \tag{19}$$

Отвечающие этим собственным значениям функции дискретного спектра выражаются через компоненты векторов $\varepsilon_\pm^{\text{in ext}}$, которые могут быть найдены из следующей однородной системы уравнений:

$$\varepsilon_+^{\text{in}} = \tilde{A}\varepsilon_-^{\text{in}} + Q^*\varepsilon_-^{\text{ext}}, \quad \varepsilon_+^{\text{in}} = \Delta^{-1}(i\varkappa)\varepsilon_-^{\text{in}},$$

$$\varepsilon_+^{\text{ext}} = Q\varepsilon_-^{\text{in}} + A\varepsilon_-^{\text{ext}}, \quad \varepsilon_-^{\text{ext}} = \Phi(-\varkappa^2)\varepsilon_+^{\text{ext}}.$$

Заметим, что каждый корень $k=i\varkappa$ уравнения (19) является простым полюсом S-матрицы.

Интересно проследить за движением собственных чисел оператора $\mathcal{A}_\alpha$ при размыкании канала связи между «внешней» и «внутренней» системами $\alpha\to 0$. В этом случае собственные числа $-\varkappa_{st}^2$ оператора $\mathcal{A}_\alpha$ стремятся при $\alpha\to 0$ к отрицательным собственным числам $\lambda_{st}=-a_{st}^2$ оператора A^{in}:

$$\varkappa_{st}-a_{st} \sim -\frac{\alpha^2}{3\pi}\langle P_{st}\varphi_s, \varphi_s\rangle \frac{\lambda_{st}^2+1}{\sqrt{|\lambda_{st}|}}\ln(1/|\lambda_{st}|).$$

Иначе обстоит дело с положительными собственными числами $\lambda_{st}=$ $=a_{st}^2$ оператора A^{in}. Им тоже отвечают при малых α полюса матрицы рассеяния, однако эти полюса $k_{st}(\alpha)$ уже лежат в нижней полуплоскости:

$$k_{st}(\alpha)-a_{st} \sim \frac{\alpha^2}{3\pi}\langle P_{st}\varphi_s, \varphi_s\rangle \frac{\lambda_{st}^2+1}{\sqrt{\lambda_{st}}}\left(\ln\frac{1}{\lambda_{st}} - i\pi\right),$$

и «внешняя» часть соответствующих решений однородного уравнения (13), имеющая формально прежний вид, оказывается растущей функцией при $|x|\to\infty$. Такие решения принято называть резонансными состояниями, а комплексные числа $k_{st}(\alpha)$ — резонансами. Найденные нами числа $k_{st}(\alpha)$ могут быть интерпретированы как трехчастичные резонансы, порожденные нетривиальной внутренней структурой сталкивающихся частиц, а соответствующие растущие решения приобретают смысл нестабильных (метастабильных при малых α) состояний.

В заключение подчеркнем, что в рамках данного метода можно без труда смоделировать внутреннюю структуру частиц, проявляющуюся уже в парных столкновениях. Желание следить по отдельности за вкладом тройных и парных сил в S-оператор побудило нас не включать соответствующие парные взаимодействия в полный гамильтониан. Отвечающий этому случаю анализ будет опубликован в другом месте.

Литература

[1] *Березин Ф. А., Похил Г. П., Финкельберг В. М.*— Вестн. МГУ, сер. матем., 1964, *1*, 21–27.
[2] *Mc Guire J. B., Hurst C. A.*— J. Math. Phys., 1972, *13*, № 10, 1595–1607.
[3] *Lipszyc K.*— J. Math. Phys., 1974, *15*, № 1, 133–138; 1980, *21*, № 5, 1092–1102.
[4] *Буслаев В. С., Меркурьев С. П., Саликов С. П.*— В кн.: Проблемы математической физики, 1979, в. 9, 14–30.
[5] *Павлов Б. С.*— ТМФ, 1984, *59*, № 3, 345–353.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 11.VI.1984 г.

ONE-DIMENSIONAL MODEL OF THREE-PARTICLE RESONANCES

Kuperin Yu. A., Makarov K. A., Pavlov B. S.

Theory of extensions in used for constructing the nontrivial scattering matrix of a system of three identical particles in the boundary condition model. The analytical structure of the S-matrix obtained is investigated.